

# Unidad VI. Perturbaciones seculares y resonantes

En las unidades precedentes hemos visto que la función perturbadora puede desarrollarse en una serie infinita donde los términos individuales pueden clasificarse como seculares, resonantes o de corto período dependiendo del problema a resolver. Si bien se demostró que el problema de los  $n$  cuerpos no tiene solución analítica, en esta unidad veremos cómo obtener este tipo de soluciones en situaciones particulares que pueden ser aplicadas al estudio del movimiento de los cuerpos del Sistema Solar.

## 1. Perturbaciones seculares para dos cuerpos masivos:

Consideremos el movimiento de dos cuerpos con masas  $m_1$  y  $m_2$  que se mueven bajo su atracción gravitatoria mutua y de un objeto central de masa  $m_0$ , donde  $m_0 \gg m_1$  y  $m_0 \gg m_2$ . Las funciones perturbadoras que describen las perturbaciones sobre las órbitas de estos objetos, que se designan  $\mathcal{R}_1$  y  $\mathcal{R}_2$ , son funciones de los elementos *osculadores* de ambos objetos, mientras que las perturbaciones en los elementos orbitales vienen dadas por las ecuaciones planetarias de Lagrange [ecuaciones (V-10)].

Si no existe ninguna commensurabilidad entre los movimientos medios de las dos masas, las funciones perturbadoras estarán dominadas por los términos seculares y en el movimiento de estos objetos aparecerá una PERTURBACIÓN SECULAR. Si limitamos el desarrollo de la función perturbadora a segundo orden en excentricidades e inclinaciones [ecuaciones (V-23), (V-24) y (V-25)], la componente secular de la parte directa de la función perturbadora promediada es:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{R}_D \rangle^{sec} &= \frac{1}{8}(e_1^2 + e_2^2)[2\alpha_{12}D + \alpha_{12}^2 D^2] b_{\frac{1}{2}}^{(0)} - \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2)\alpha_{12} b_{\frac{3}{2}}^{(1)} + \\
 &+ \frac{1}{4}e_1 e_2 [2 - 2\alpha_{12}D - \alpha_{12}^2 D^2] b_{\frac{1}{2}}^{(j+1)} \times \cos[\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2] + \\
 &+ s_1 s_2 \alpha_{12} b_{\frac{3}{2}}^{(1)} \cos[\Omega_1 - \Omega_2],
 \end{aligned} \tag{VI-1}$$

donde los índices 1 y 2 se refieren a los objetos más interno y más externo, respectivamente,  $\alpha_{12} = a_1/a_2$  para  $a_1 < a_2$ , y no se incluye el término  $\frac{1}{2}b_{\frac{1}{2}}^{(j)}$  porque no contribuye a la perturbación. La parte indirecta de la función perturbadora no contribuye con ningún término dado que en todos ellos interviene al menos una longitud media. Entonces, utilizando las ecuaciones

(V-11) y recordando que  $\mathcal{R}_1$  se produce por un perturbador externo mientras que  $\mathcal{R}_2$  se debe a un perturbador interno, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}_1 \rangle &= \frac{Gm_2}{a_2} \langle \mathcal{R}_D \rangle^{sec} = \frac{Gm_2}{a_1} \alpha_{12} \langle \mathcal{R}_D \rangle^{sec}, \\ \langle \mathcal{R}_2 \rangle &= \frac{Gm_1}{a_1} \alpha_{12} \langle \mathcal{R}_D \rangle^{sec} = \frac{Gm_1}{a_2} \langle \mathcal{R}_D \rangle^{sec}. \end{aligned} \quad (VI-2)$$

Si utilizamos las relaciones:

$$\begin{aligned} 2\alpha D b_{\frac{1}{2}}^{(0)} + \alpha^2 D^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)} &= \alpha b_{\frac{3}{2}}^{(1)}, \\ 2b_{\frac{1}{2}}^{(1)} - 2\alpha D b_{\frac{1}{2}}^{(1)} + \alpha^2 D^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)} &= -\alpha b_{\frac{3}{2}}^{(2)}, \end{aligned}$$

donde  $D \equiv d/d\alpha$ , y las aproximaciones  $Gm_0 \approx n_1^2 a_1^3 \approx n_2^2 a_2^3$ , podemos escribir las ecuaciones (VI-2) como:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}_1 \rangle &= n_1^2 a_1^2 \frac{m_2}{m_0 + m_1} \left[ \frac{1}{8} \alpha_{12} b_{\frac{3}{2}}^{(1)} e_1^2 - \frac{1}{8} \alpha_{12} b_{\frac{3}{2}}^{(1)} i_1^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \alpha_{12} b_{\frac{3}{2}}^{(2)} e_1 e_2 \cos(\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \alpha_{12} b_{\frac{3}{2}}^{(1)} i_1 i_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2) \right], \end{aligned} \quad (VI-3)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}_2 \rangle &= n_2^2 a_2^2 \frac{m_1}{m_0 + m_2} \left[ \frac{1}{8} \alpha_{12} b_{\frac{3}{2}}^{(1)} e_2^2 - \frac{1}{8} \alpha_{12} b_{\frac{3}{2}}^{(1)} i_2^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \alpha_{12} b_{\frac{3}{2}}^{(2)} e_1 e_2 \cos(\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \alpha_{12} b_{\frac{3}{2}}^{(1)} i_1 i_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2) \right], \end{aligned}$$

donde hemos asumido como válido que  $s_1 = \sin(i_1/2) \approx i_1/2$  y  $s_2 = \sin(i_2/2) \approx i_2/2$ . Las ecuaciones (VI-3) pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}_j \rangle &= n_j a_j^2 \left[ \frac{1}{2} A_{jj} e_j^2 + A_{jk} e_1 e_2 \cos(\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} B_{jj} i_j^2 + B_{jk} i_1 i_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2) \right], \end{aligned} \quad (VI-4)$$

donde  $j = 1, 2$ ,  $k = 2, 1$ ,  $k \neq j$ , y:

$$A_{jj} = +n_j \frac{1}{4} \frac{m_k}{m_0 + m_j} \alpha_{12} \bar{\alpha}_{12} b_{\frac{3}{2}}^{(1)}(\alpha_{12}),$$

$$A_{jk} = -n_j \frac{1}{4} \frac{m_k}{m_0 + m_j} \alpha_{12} \bar{\alpha}_{12} b_{\frac{3}{2}}^{(2)}(\alpha_{12}),$$

$$B_{jj} = -n_j \frac{1}{4} \frac{m_k}{m_0 + m_j} \alpha_{12} \bar{\alpha}_{12} b_{\frac{3}{2}}^{(1)}(\alpha_{12}),$$

$$B_{jk} = +n_j \frac{1}{4} \frac{m_k}{m_0 + m_j} \alpha_{12} \bar{\alpha}_{12} b_{\frac{3}{2}}^{(1)}(\alpha_{12}),$$

donde  $\bar{\alpha}_{12} = \alpha_{12}$  si  $j = 1$  (perturbador externo), y  $\bar{\alpha}_{12} = 1$  si  $j = 2$  (perturbador interno). Todas estas cantidades son *frecuencias* que pueden considerarse como los elementos de dos matrices **A** y **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix}.$$

Los elementos de estas matrices son sólo funciones de las masas y los semiejes mayores de ambos cuerpos, y hay que notar que las líneas o columnas de la matriz **B** no son linealmente independientes ( $B_{11} = -B_{12}$  y  $B_{21} = -B_{22}$ ).

Si ahora tomamos el menor orden posible en excentricidad e inclinación en las ecuaciones (V-10) obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{de_j}{dt} &= -\frac{1}{n_j a_j^2 e_j} \frac{\partial \langle \mathcal{R}_j \rangle}{\partial \tilde{\omega}_j}, \\ \frac{d\tilde{\omega}_j}{dt} &= +\frac{1}{n_j a_j^2 e_j} \frac{\partial \langle \mathcal{R}_j \rangle}{\partial e_j}, \\ \frac{di_j}{dt} &= -\frac{1}{n_j a_j^2 i_j} \frac{\partial \langle \mathcal{R}_j \rangle}{\partial \Omega_j}, \\ \frac{d\Omega_j}{dt} &= +\frac{1}{n_j a_j^2 i_j} \frac{\partial \langle \mathcal{R}_j \rangle}{\partial i_j}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI-5})$$

Dada la forma de las ecuaciones (VI-5) es conveniente definir las componentes verticales y horizontales de los *vectores* de excentricidad e inclinación como:

$$\begin{aligned} h_j &= e_j \sin \tilde{\omega}_j, & k_j &= e_j \cos \tilde{\omega}_j, \\ p_j &= i_j \sin \Omega_j, & q_j &= i_j \cos \Omega_j. \end{aligned} \quad (\text{VI-6})$$

Estas variables tienen la ventaja de evitar las singularidades que aparecen en las ecuaciones (VI-5) para valores pequeños de la excentricidad y la inclinación. Utilizando estas nuevas variables, podemos escribir la ecuación (VI-4) de la forma:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}_j \rangle = n_j a_j^2 & \left[ \frac{1}{2} A_{jj} (h_j^2 + k_j^2) + A_{jk} (h_j h_k + k_j k_k) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} B_{jj} (p_j^2 + q_j^2) + B_{jk} (p_j p_k + q_j q_k) \right]. \end{aligned} \quad (\text{VI-7})$$

Como  $h_j$ ,  $k_j$ ,  $p_j$ , y  $q_j$  son funciones de dos variables, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \frac{dh_j}{dt} &= \frac{\partial h_j}{\partial e_j} \frac{de_j}{dt} + \frac{\partial h_j}{\partial \tilde{\omega}_j} \frac{d\tilde{\omega}_j}{dt}, \\ \frac{dk_j}{dt} &= \frac{\partial k_j}{\partial e_j} \frac{de_j}{dt} + \frac{\partial k_j}{\partial \tilde{\omega}_j} \frac{d\tilde{\omega}_j}{dt}, \\ \frac{dp_j}{dt} &= \frac{\partial p_j}{\partial i_j} \frac{di_j}{dt} + \frac{\partial p_j}{\partial \Omega_j} \frac{d\Omega_j}{dt}, \\ \frac{dq_j}{dt} &= \frac{\partial q_j}{\partial i_j} \frac{di_j}{dt} + \frac{\partial q_j}{\partial \Omega_j} \frac{d\Omega_j}{dt}, \end{aligned} \quad (\text{VI-8})$$

donde las derivadas parciales son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_j}{\partial e_j} &= \frac{h_j}{e_j}, & \frac{\partial k_j}{\partial e_j} &= \frac{k_j}{e_j}, & \frac{\partial h_j}{\partial \tilde{\omega}_j} &= +k_j, & \frac{\partial k_j}{\partial \tilde{\omega}_j} &= -h_j, \\ \frac{\partial p_j}{\partial i_j} &= \frac{p_j}{i_j}, & \frac{\partial q_j}{\partial i_j} &= \frac{q_j}{i_j}, & \frac{\partial p_j}{\partial \Omega_j} &= +q_j, & \frac{\partial q_j}{\partial \Omega_j} &= -p_j. \end{aligned}$$

Operando con estas cantidades, se obtiene finalmente que las ecuaciones (VI-5) pueden escribirse como:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dh_j}{dt} &= + \frac{1}{n_j a_j^2} \frac{\partial \langle \mathcal{R}_j \rangle}{\partial k_j}, \\ \frac{dk_j}{dt} &= - \frac{1}{n_j a_j^2} \frac{\partial \langle \mathcal{R}_j \rangle}{\partial h_j}, \\ \frac{dp_j}{dt} &= + \frac{1}{n_j a_j^2} \frac{\partial \langle \mathcal{R}_j \rangle}{\partial q_j}, \\ \frac{dq_j}{dt} &= - \frac{1}{n_j a_j^2} \frac{\partial \langle \mathcal{R}_j \rangle}{\partial p_j}. \end{aligned} \right] \quad (\text{VI-9})$$

Reemplazando la ecuación (VI-7) en las anteriores obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{dh_1}{dt} &= +A_{11}k_1 + A_{12}k_2, & \frac{dk_1}{dt} &= -A_{11}h_1 - A_{12}h_2, \\
\frac{dh_2}{dt} &= +A_{21}k_1 + A_{22}k_2, & \frac{dk_2}{dt} &= -A_{21}h_1 - A_{22}h_2, \\
\frac{dp_1}{dt} &= +B_{11}q_1 + B_{12}q_2, & \frac{dq_1}{dt} &= -B_{11}p_1 - B_{12}p_2, \\
\frac{dp_2}{dt} &= +B_{21}q_1 + B_{22}q_2, & \frac{dq_2}{dt} &= -B_{21}p_1 - B_{22}p_2.
\end{aligned}$$

Este conjunto de ecuaciones diferenciales indican que, en el orden más bajo, las expresiones para  $\{h_j, k_j\}$  están desacopladas de las correspondientes expresiones para  $\{p_j, q_j\}$ . Además, son ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes por lo cual el problema de las perturbaciones seculares se reduce a encontrar dos conjuntos de autovalores. Las soluciones vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
h_j &= \sum_{l=1}^2 e_{jl} \sin(g_l t + \beta_l), & k_j &= \sum_{l=1}^2 e_{jl} \cos(g_l t + \beta_l), \\
p_j &= \sum_{l=1}^2 i_{jl} \sin(f_l t + \gamma_l), & q_j &= \sum_{l=1}^2 i_{jl} \cos(f_l t + \gamma_l),
\end{aligned} \tag{VI-10}$$

donde las frecuencias  $g_l$  ( $l = 1, 2$ ) son los autovalores de la matriz  $\mathbf{A}$  y  $e_{jl}$  son los componentes de los autovectores correspondientes, mientras que  $f_l$  ( $l = 1, 2$ ) son los autovalores de la matriz  $\mathbf{B}$  e  $i_{jl}$  son los componentes de los autovectores correspondientes. Las fases,  $\beta_l$  y  $\gamma_l$ , y las amplitudes de los autovectores se determinan por las condiciones iniciales (en general, las excentricidades e inclinaciones osculadoras en un cierto instante). La solución dada por las ecuaciones (VI-10) se denomina SOLUCIÓN SECULAR CLÁSICA DE LAPLACE - LAGRANGE para el problema secular.

Las soluciones dadas por las ecuaciones (VI-10) implican que el movimiento resultante para cualquier masa es *estable para cualquier instante*, pero hay que recordar que para obtener este resultado se han realizado una serie de aproximaciones importantes por lo cual son correctas sólo en primer orden y es de esperar que existan contribuciones significativas al considerar órdenes superiores.

## 2. Elementos libres y forzados:

Al obtener una solución estable al problema secular del movimiento de dos cuerpos masivos es posible obtener las excentricidades, longitudes del perihelio, inclinaciones y longitudes del nodo de cada uno de ellos para cualquier instante. Si utilizamos esta solución para estudiar el movimiento de un tercer cuerpo sin masa que se mueve bajo la influencia gravitatoria del cuerpo central y es perturbado por los otros dos, de la ecuación (VI-4) obtenemos que:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R} \rangle = na^2 & \left[ \frac{1}{2} A e^2 + \frac{1}{2} B i^2 + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^2 A_j e e_j \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_j) + \sum_{j=1}^2 B_j i i_j \cos(\Omega - \Omega_j) \right], \end{aligned} \quad (\text{VI-11})$$

donde los elementos sin sub-índice corresponden al cuerpo sin masa, y:

$$A = +n \frac{1}{4} \sum_{j=1}^2 \frac{m_j}{m_0} \alpha_j \bar{\alpha}_j b_{\frac{3}{2}}^{(1)}(\alpha_j),$$

$$A_j = -n \frac{1}{4} \frac{m_j}{m_0} \alpha_j \bar{\alpha}_j b_{\frac{3}{2}}^{(2)}(\alpha_j),$$

$$B = -n \frac{1}{4} \sum_{j=1}^2 \frac{m_j}{m_0} \alpha_j \bar{\alpha}_j b_{\frac{3}{2}}^{(1)}(\alpha_j),$$

$$B_j = +n \frac{1}{4} \frac{m_j}{m_0} \alpha_j \bar{\alpha}_j b_{\frac{3}{2}}^{(1)}(\alpha_j),$$

donde  $\alpha_j = a_j/a$  y  $\bar{\alpha}_j = 1$  si  $a_j < a$ , y  $\alpha_j = a/a_j$  y  $\bar{\alpha}_j = a/a_j$  si  $a_j > a$ . Si transformamos a un nuevo conjunto de variables  $h, k, p$  y  $q$  para el cuerpo sin masa:

$$h = e \sin \tilde{\omega}, \quad k = e \cos \tilde{\omega},$$

$$p = i \sin \Omega, \quad q = i \cos \Omega,$$

y utilizamos las transformaciones dadas en las ecuaciones (VI-6) para los cuerpos con masa, tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R} \rangle = na^2 & \left[ \frac{1}{2} A (h^2 + k^2) + \frac{1}{2} B (p^2 + q^2) + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^2 A_j (h h_j + k k_j) + \sum_{j=1}^2 B_j (p p_j + q q_j) \right], \end{aligned} \quad (\text{VI-12})$$

y las ecuaciones de movimiento son:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= +\frac{1}{na^2} \frac{\partial \langle \mathcal{R} \rangle}{\partial k}, \\ \frac{dk}{dt} &= -\frac{1}{na^2} \frac{\partial \langle \mathcal{R} \rangle}{\partial h}, \\ \frac{dp}{dt} &= +\frac{1}{na^2} \frac{\partial \langle \mathcal{R} \rangle}{\partial q}, \\ \frac{dq}{dt} &= -\frac{1}{na^2} \frac{\partial \langle \mathcal{R} \rangle}{\partial p}. \end{aligned} \right\}$$

Si reemplazamos la ecuación (VI-12) en las últimas ecuaciones, podemos escribir que:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= +Ak + \sum_{l=1}^2 A_j k_j, & \frac{dk}{dt} &= -Ah - \sum_{l=1}^2 A_j h_j, \\ \frac{dp}{dt} &= +Bq + \sum_{l=1}^2 B_j q_j, & \frac{dq}{dt} &= -Bp - \sum_{l=1}^2 B_j p_j. \end{aligned} \tag{VI-13}$$

Reemplazando las ecuaciones (VI-10) en las ecuaciones (VI-13), obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= +Ak + \sum_{l=1}^2 A_j \sum_{l=1}^2 e_{jl} \cos(gt + \beta_l), \\ \frac{dk}{dt} &= -Ah - \sum_{l=1}^2 A_j \sum_{l=1}^2 e_{jl} \sin(gt + \beta_l), \\ \frac{dp}{dt} &= +Bq + \sum_{l=1}^2 B_j \sum_{l=1}^2 i_{jl} \cos(ft + \gamma_l), \\ \frac{dq}{dt} &= -Bp - \sum_{l=1}^2 B_j \sum_{l=1}^2 i_{jl} \sin(ft + \gamma_l). \end{aligned} \tag{VI-14}$$

Derivando una vez más las ecuaciones (VI-14), tenemos finalmente:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2h}{dt^2} &= -A^2h - \sum_{l=1}^2 \psi_l (A + g_l) \sin(g_l t + \beta_l), \\
\frac{d^2k}{dt^2} &= -A^2k - \sum_{l=1}^2 \psi_l (A + g_l) \cos(g_l t + \beta_l), \\
\frac{d^2p}{dt^2} &= -B^2p - \sum_{l=1}^2 \mu_l (B + f_l) \sin(f_l t + \gamma_l), \\
\frac{d^2q}{dt^2} &= -B^2q - \sum_{l=1}^2 \mu_l (B + f_l) \cos(f_l t + \gamma_l),
\end{aligned} \tag{VI-15}$$

donde:

$$\psi_l = \sum_{j=1}^2 A_j e_{jl}, \quad \mu_l = \sum_{j=1}^2 B_j i_{jl}.$$

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales desacopladas (VI-15) son:

$$\begin{aligned}
h &= e_{lib} \sin(At + \beta) + h_0(t), & k &= e_{lib} \cos(At + \beta) + k_0(t), \\
p &= i_{lib} \sin(Bt + \gamma) + p_0(t), & q &= i_{lib} \cos(Bt + \gamma) + q_0(t),
\end{aligned} \tag{VI-16}$$

donde  $e_{lib}$ ,  $i_{lib}$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son constantes que se determinan a partir de las condiciones de contorno, y:

$$\begin{aligned}
h_0(t) &= - \sum_{l=1}^2 \frac{\psi_l}{A - g_l} \sin(g_l t + \beta_l), \\
k_0(t) &= - \sum_{l=1}^2 \frac{\psi_l}{A - g_l} \cos(g_l t + \beta_l), \\
p_0(t) &= - \sum_{l=1}^2 \frac{\mu_l}{B - f_l} \sin(f_l t + \gamma_l), \\
q_0(t) &= - \sum_{l=1}^2 \frac{\mu_l}{B - f_l} \cos(f_l t + \gamma_l).
\end{aligned} \tag{VI-17}$$

Las funciones  $h_0$ ,  $k_0$ ,  $p_0$ , y  $q_0$  dependen de los semiejes mayores del cuerpo sin masa y de la solución al problema secular de los dos cuerpos perturbadores, por lo tanto también variarán en el tiempo.

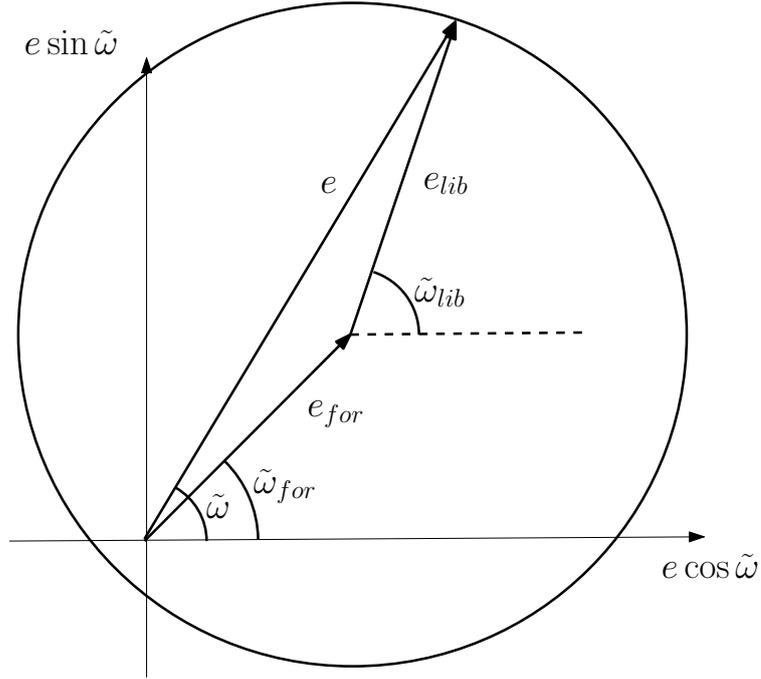


Figura 19:

Si definimos las cantidades:

$$e_{for} = \sqrt{h_0^2 + k_0^2}, \quad i_{for} = \sqrt{p_0^2 + q_0^2},$$

las soluciones presentadas en las ecuaciones (VI-16) tienen una interpretación geométrica simple. En el caso de la solución  $h - k$ , los valores de  $k$  y  $h$  para el cuerpo sin masa definen un punto en el plano  $k - h$ . El vector desde el origen hasta este punto tiene un largo  $e$  y forma un ángulo  $\tilde{\omega}$  con el eje  $k$ . En función de los resultados encontrados, este vector puede ser interpretado como la suma de dos vectores: el primero va desde el origen hasta el punto  $(k_0, h_0)$ , tiene un largo  $e_{for}$  y forma un ángulo  $\tilde{\omega}_{for}$  con el eje  $k$ . El segundo, va desde el punto  $(k_0, h_0)$  hasta el punto  $(k, h)$ , tiene un largo  $e_{lib}$  y forma un ángulo  $\tilde{\omega}_{lib} = At + \beta$  con el eje  $k$ . Esto implica que el movimiento del cuerpo sin masa puede ser visto como un movimiento en un círculo de centro  $(k_0, h_0)$  a una tasa constante  $A$  mientras que este punto se mueve de forma más complicada determinada por la solución secular de los dos cuerpos perturbadores (Figura 19). Las cantidades  $e_{for}$  y  $\tilde{\omega}_{for}$  se obtienen de  $h_0$  y  $k_0$  y se denominan EXCENTRICIDAD FORZADA y LONGITUD DEL PERIHELIO FORZADA del cuerpo sin masa, y sus valores se determinan sólo por el semieje mayor del cuerpo sin masa y la solución secular para los dos perturbadores. En contraste,  $e_{lib}$  y  $\tilde{\omega}_{lib}$  se denominan EXCENTRICIDAD LIBRE y LONGITUD DEL PERIHELIO LIBRE del cuerpo sin masa, y son cantidades que se obtienen

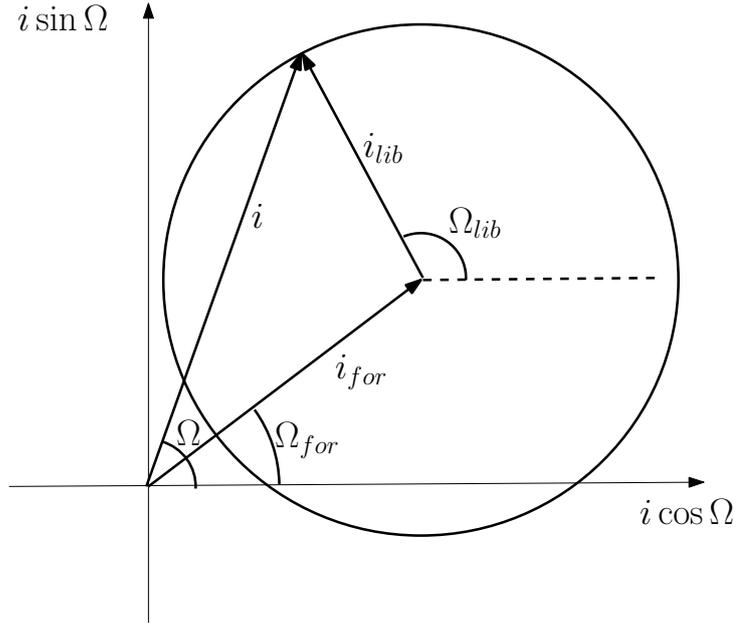


Figura 20:

de las condiciones de contorno y designan *parámetros orbitales fundamentales* del cuerpo sin masa. Estas últimas cantidades también se designan EXCENTRICIDAD PROPIA y LONGITUD DEL PERIHELIO PROPIA del cuerpo sin masa.

En la Figura 20 vemos el caso de la solución  $p - q$ , donde  $i_{for}$ ,  $\Omega_{for}$ ,  $i_{lib}$  y  $\Omega_{lib}$  designan la INCLINACIÓN FORZADA, LONGITUD DEL NODO FORZADA, INCLINACIÓN LIBRE y LONGITUD DEL NODO LIBRE del cuerpo sin masa, respectivamente.

Como las expresiones para  $e_{for}$  e  $i_{for}$  dependen de las definiciones de  $h_0$ ,  $k_0$ ,  $p_0$ , y  $q_0$ , pueden aparecer valores muy grandes de  $e_{for}$  e  $i_{for}$  si alguna de las condiciones  $A - g_l \approx 0$  o  $B - f_l \approx 0$  se cumplen. Dado que tanto  $g_l$  como  $f_l$  son autofrecuencias de un sistema de dos cuerpos interactuantes mientras que  $A$  y  $B$  son funciones del semieje mayor del cuerpo sin masa, estas condiciones implican que existen ciertos semiejes mayores para los cuales *aparecen singularidades* en las excentricidades e inclinaciones forzadas.

### 3. Familias de asteroides:

El análisis precedente indica que la excentricidad osculadora de un objeto pequeño, el cual se considera sin masa, que se mueve bajo los efectos gravitatorios de los planetas puede considerarse como la resultante de dos componentes: una excentricidad libre o propia que representa la excentricidad inherente del objeto, y una excentricidad forzada que es el resul-

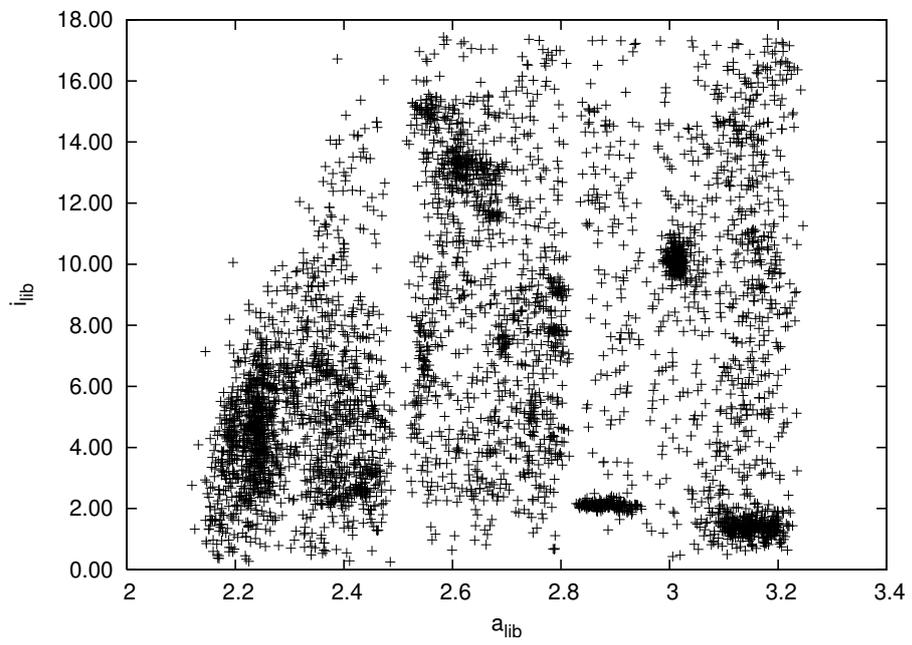
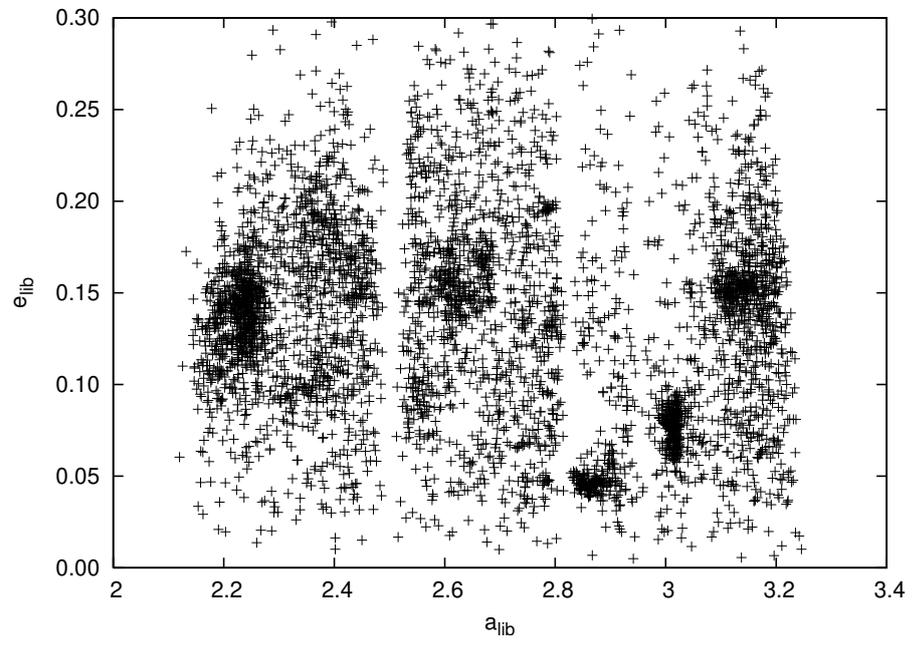


Figura 21:

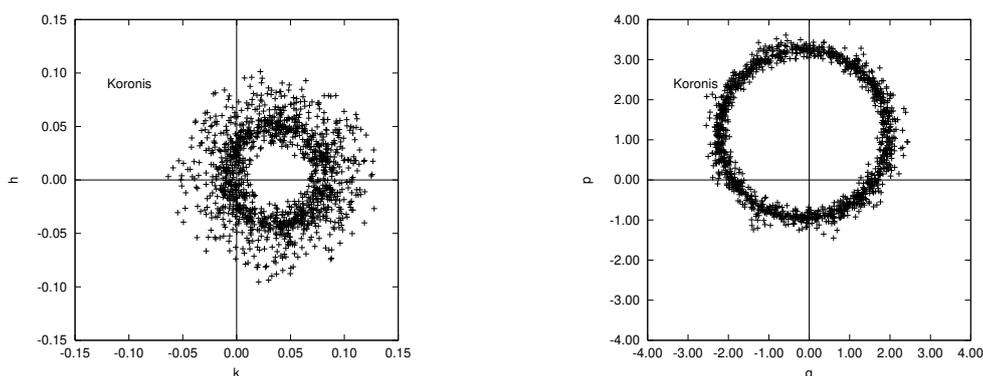


Figura 22:

tado del semieje mayor de su órbita y la posición relativa de los perturbadores. Los mismos argumentos son aplicables a la inclinación. Entonces, la excentricidad e inclinación libre o propia da información de los elementos originales sin los efectos de perturbación por otros objetos a lo largo de los años.

En 1918 Hirayama encontró que algunos asteroides se agrupaban en el espacio de elementos propios  $a_{lib}$ ,  $e_{lib}$ ,  $i_{lib}$ , y propuso el nombre de FAMILIAS para cada agrupamiento, sugiriendo además que los objetos en cada familia debían tener un origen común. En la Figura 21 se muestra la distribución de asteroides en el cinturón en los planos  $a_{lib} - e_{lib}$  y  $a_{lib} - i_{lib}$ , donde es posible identificar diferentes agrupamientos de objetos.

También se encontró en la sección anterior que la variación de los elementos orbitales puede verse como un movimiento con un centro determinado por los valores forzados. En la Figura 22 se muestran gráficos de  $k - h$  y  $q - p$  para los asteroides de la familia Koronis, donde se utilizaron los elementos osculadores actuales. Se observa que los objetos se distribuyen en ambos casos en un círculo centrado en el valor de la respectiva componente forzada. Esto implica que los objetos de una misma familia tienen componentes forzadas comunes, mientras que las componentes libres se ven distribuidas al azar en función de las longitudes del perihelio y del nodo libres.

#### 4. Resonancias seculares:

La teoría secular más utilizada en la actualidad para el Sistema Solar se debe a Brouwer & van Woerkom (1950), quienes analizaron el problema del movimiento secular de todos los planetas. Esta teoría tiene 10 autofrecuencias y fases en lugar de las 8 esperadas, siendo las

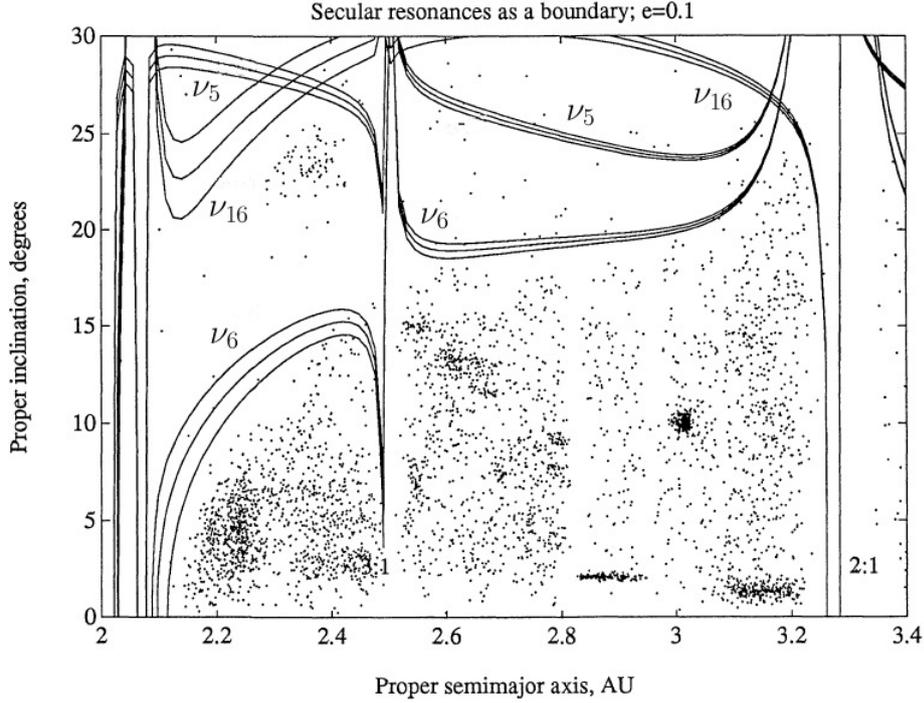


Figura 23:

dos frecuencias extra debido a un planteo secular de orden superior.

En la sección anterior se vio que en un sistema donde existe un cierto número de perturbadores se dificulta el cálculo de elementos forzados para cuerpos sin masa en el caso de semiejes mayores donde  $A$  o  $B$  son iguales a alguna de las autofrecuencias del sistema. Entonces, diremos que aparece una RESONANCIA SECULAR cuando dos períodos o frecuencias son commensurables. En el caso que estamos mencionando,  $A = d\tilde{\omega}_{lib}/dt$  y  $B = d\Omega_{lib}/dt$  son frecuencias del cuerpo sin masa y aparecerá una resonancia secular cuando sean commensurables con alguna de las frecuencias del sistema.

Si bien un desarrollo completo de la teoría secular implica desarrollos de orden superior al que estamos estudiando, podemos decir que éste estudio básico permite identificar los lugares donde aparecen este tipo de resonancias. Si designamos a las resonancias seculares como  $\nu_j$ , donde  $j$  indica la autofrecuencia del sistema considerada ( $\nu_1 = A - g_1, \dots, \nu_{10} = A - g_{10}, \nu_{11} = B - f_1, \dots, \nu_{18} = B - f_8$ ), es posible distinguir las RESONANCIAS SECULARES LINEALES  $\nu_5 = A - g_5, \nu_6 = A - g_6$  y  $\nu_{16} = B - f_6$ , de las RESONANCIAS SECULARES NO LINEALES que se obtienen de las ecuaciones de movimiento considerando potencias superiores en excentricidad e inclinación, como  $A + b - g_5 - f_6, A + B - f_6 - g_6, A - 2g_6 + g_5$ , etc.. En la Figura 23

se muestra la posición de los asteroides más brillantes en un gráfico de semieje mayor propio versus inclinación propia, donde también se indican las resonancias seculares lineales  $\nu_5$ ,  $\nu_6$  y  $\nu_{16}$  calculadas para  $e_{lib} = 0,1$ .

Otra forma de resonancia secular aparece para objetos sin masa en órbitas muy inclinadas pero donde no intervienen las autofrecuencias del sistema. Una RESONANCIA DE KOZAI aparece cuando  $d\omega/dt = 0$ . Como  $\tilde{\omega} = \omega + \Omega$ , la condición resonante se reduce a  $A = B$ . Como para órbitas de baja excentricidad e inclinación  $A$  y  $B$  son de magnitud igual y signo contrario, este tipo de resonancia sólo ocurre para inclinaciones grandes. Kozai demostró que un objeto sin masa perturbado por Júpiter y que se mueve en una órbita circular no sufriría perturbación secular en su semieje mayor pero su excentricidad e inclinación sufrirían cambios de tal modo que la cantidad  $H_K = \sqrt{1 - e^2} \cos i$  siempre permaneciera constante, lo que implica que la excentricidad e inclinación están acopladas siendo  $e$  máximo cuando  $i$  es mínimo y viceversa. Además, si la inclinación es baja la anomalía media libra alrededor de los puntos estables  $\omega = 0^\circ$  y  $\omega = 180^\circ$ , pero para inclinaciones mayores a  $\approx 30^\circ$  los puntos estables cambian a  $\omega = 90^\circ$  y  $\omega = 270^\circ$ .

## 5. Perturbaciones resonantes y su geometría:

Vimos en la Unidad 5 que los términos resonantes en la función perturbadora generaban efectos importantes en el movimiento de un objeto sujeto a perturbaciones cuando aparecen pequeños divisores debido a la conmensurabilidad entre los períodos orbitales del objeto y del perturbador. Hasta ahora vimos que cuando el cociente entre los movimientos medios se aproxima al valor exacto que produce la resonancia los elementos orbitales pueden variar con grandes amplitudes. Veamos ahora cual es la geometría de este tipo de resonancia.

Consideremos para simplificar que Júpiter se mueve en una órbita circular y que perturba a un asteroide, que se asume sin masa, el cual se encuentra en resonancia 2 : 1 con Júpiter. Vamos a ignorar cualquier efecto físico de la perturbación para estudiar sólo la geometría que lleva a encuentros repetidos. Si consideramos un instante  $t = 0$  para el cual Júpiter y el asteroide se encuentran en conjunción con el asteroide en su perihelio (Figura 24, posiciones 1 y  $A$ ), como el objeto esta en resonancia 2 : 1 efectuará dos vueltas alrededor de su órbita cuando Júpiter complete una. Sin considerar perturbaciones, cuando Júpiter llegue al punto 2 el asteroide estará en el afelio de su órbita (punto  $B$ ), y las sucesivas configuraciones (3 –  $A$ , 4 –  $B$ ) llevan a que Júpiter estará lejos del asteroide cuando llegue al afelio de su órbita, que corresponde al punto de mínima separación entre ambos. Entonces, si bien parecería que existe la posibilidad de acercamientos entre ambos produciendo grandes perturbaciones, las

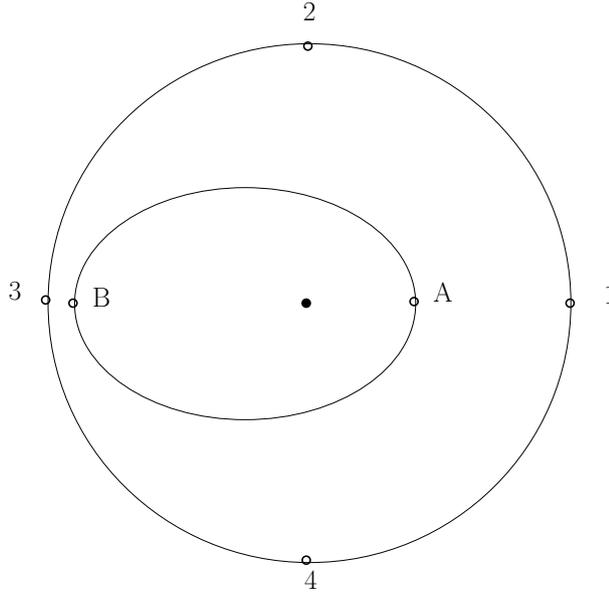


Figura 24:

configuraciones peligrosas se evitan por el mecanismo de resonancia. Este es un ejemplo de una CONFIGURACIÓN DE EQUILIBRIO ESTABLE entre el asteroide y Júpiter.

Si en lugar de esta configuración estable consideramos que el movimiento se inicia con Júpiter en el punto 3 y el asteroide en el punto B, una vez tras otra los objetos se encontrarán en esta conjunción con el asteroide en el afelio de su órbita en su separación mínima. Este es un ejemplo de una CONFIGURACIÓN DE EQUILIBRIO INESTABLE entre el asteroide y Júpiter.

Si examinamos la geometría de la resonancia para un caso más general, por ejemplo dos satélites moviéndose alrededor del planeta en órbitas coplanaras, podemos asumir que:

$$\frac{n'}{n} = \frac{p}{p+q}, \quad (\text{VI-18})$$

donde  $n'$  y  $n$  son los movimientos medios del satélite externo e interno, respectivamente, y  $p$  y  $q$  son enteros. Si dos satélites están en conjunción para  $t = 0$ , la próxima conjunción sucederá cuando:

$$nt - n't = 2\pi,$$

y el período entre conjunciones sucesivas es:

$$P_{con} = \frac{2\pi}{n - n'}.$$

Como de la ecuación (VI-18) se obtiene que  $n'(p+q) = np$ , tenemos que:

$$P_{con} = \frac{p}{q} \frac{2\pi}{n'} = \frac{p}{q} P_2 = \frac{p+q}{q} P_1,$$

donde  $P_1$  y  $P_2$  son los períodos del satélite interno y externo, respectivamente. Entonces:

$$qP_{con} = pP_2 = (p + q)P_1.$$

Si  $q = 1$  cada satélite completa un número entero de órbitas entre conjunciones sucesivas y cada conjunción ocurre en la misma longitud en el sistema inercial de referencia. Si  $q = 2$ , entonces cada dos conjunciones ocurre en la misma longitud, etc.

Si ahora se considera el caso de un objeto externo en órbita elíptica y un objeto interno en órbita circular, o sea  $e = 0$ ,  $e' \neq 0$ , y  $d\tilde{\omega}'/dt \neq 0$ , tenemos que si se satisface la relación resonante:

$$(p + q)n' - pn - q\frac{d\tilde{\omega}'}{dt} = 0 \quad (\text{VI-19})$$

también podemos escribirla como:

$$\frac{n' - \frac{d\tilde{\omega}'}{dt}}{n - \frac{d\tilde{\omega}'}{dt}} = \frac{p}{p + q},$$

donde  $n' - d\tilde{\omega}'/dt$  y  $n - d\tilde{\omega}'/dt$  son movimientos medios respecto con un sistema de referencia corotante con la dirección del pericentro del satélite más externo. Ahora si  $q = 1$  todas las conjunciones sucederán en *el mismo punto de la órbita del satélite externo, pero no en la misma longitud respecto del sistema inercial*. Si la ecuación (VI-19) es válida, el correspondiente argumento resonante es:

$$\varphi = (p + q)\lambda' - p\lambda - q\tilde{\omega}'.$$

En el momento de la conjunción de los dos satélites tenemos que  $\lambda' = \lambda$  y:

$$\varphi = q(\lambda' - \tilde{\omega}') = q(\lambda - \tilde{\omega}'),$$

donde  $\varphi$  es una medida del desplazamiento de la longitud de la conjunción medida desde el pericentro del satélite más externo.

Por ejemplo, las observaciones indican que los satélites de Saturno llamados Titán e Hyperion tienen períodos orbitales de 15,945421 días y 21,276609 días, respectivamente, por lo que se encuentra en una resonancia 3:4 con éste, y la masa de Hyperion es despreciable respecto de la masa de Titán. El ángulo resonante es  $\varphi = 4\lambda' - 3\lambda - \tilde{\omega}'$ , el cual libra alrededor del apocentro de la órbita de Hyperion. Entonces, tenemos que  $4n' - 3n = -18,679^\circ/yr$  y  $4n' - 3n - d\tilde{\omega}'/dt \approx 0$ , que es confirmado por observaciones que indican que el pericentro de Hyperion está en regresión a una tasa de  $d\tilde{\omega}'/dt = -18,663^\circ/yr$ . El período entre conjunciones es de  $P_{con} = 63,637717$  días y la amplitud de la libración es de unos  $36,0^\circ$  con un período de  $1,75 yr$ .

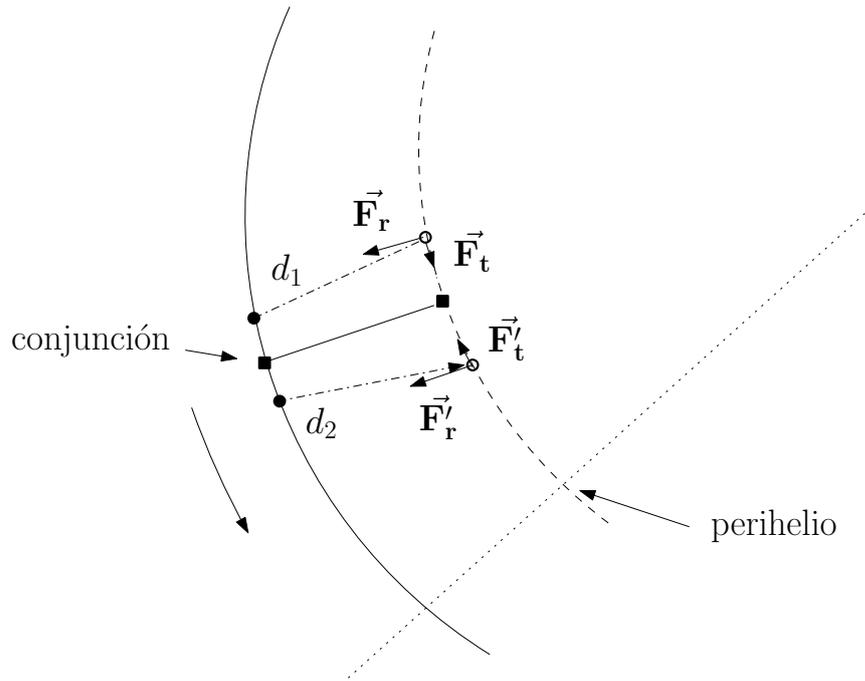


Figura 25:

## 6. La física de la resonancia:

Supongamos dos objetos orbitando una masa central, siendo el objeto más interno de masa despreciable y el externo un objeto masivo que se mueve en una órbita circular. Ambas órbitas se encuentran en el mismo plano y los objetos se encuentran en resonancia de tal modo que las conjunciones siempre ocurren en la misma longitud.

Si la conjunción ocurre siempre en el perihelio o afelio exacto de la órbita de la partícula, entonces la componente tangencial de la fuerza que ejerce el perturbador sobre ella antes y después de la conjunción son de igual magnitud, por lo cual la resultante en el sentido tangencial es cero y no hay ningún cambio en el momento angular del sistema [ecuación (V-1)]. Por otra parte, como en el caso de  $f = 0^\circ$  o  $f = 180^\circ$  (perihelio y afelio, respectivamente) necesitamos una componente tangencial para cambiar el semieje mayor de la órbita [ecuación (V-8)], en estos casos el semieje no varía.

Si la conjunción ocurre en otros puntos de la órbita, esta simetría se destruye. En la Figura 25 vemos que cualquier conjunción fuera de la línea de las ápsides produce un desbalance en las magnitudes de las componentes tangenciales de las fuerzas que ejerce el perturbador antes y después de la conjunción. En la situación de la figura, los objetos están en una situación de separación debido a que el más interno se mueve más rápido acercándose al perihelio de

su órbita, por lo cual se aleja del perturbador ( $d_1 < d_2$ ) y la componente tangencial de la fuerza perturbadora ejercida antes de la conjunción,  $\vec{F}_t$ , es mayor que la ejercida después,  $\vec{F}'_t$ , apareciendo una fuerza tangencial resultante no nula. El resultado de esta interacción es un aumento del momento angular que acerca al objeto a la posición del perihelio y una disminución de la velocidad angular media, lo que significa que la próxima conjunción sucederá más cerca del punto del perihelio. Esta situación se invierte cuando la conjunción ocurre con el objeto interno alejándose del perihelio, donde el resultado es una pérdida de momento angular y una ganancia en velocidad angular media, acercando la próxima conjunción nuevamente al punto del perihelio.

Por lo tanto, existe una tendencia en cualquier conjunción fuera de la línea de las ápsides en acercar el próximo punto de conjunción a la posición del perihelio del objeto más interno que, como vimos, es la posición de equilibrio estable del sistema y alejarlas del afelio que corresponde a la posición de equilibrio inestable.

Si ahora consideramos que las conjunciones siempre suceden en el perihelio, dado que la fuerza radial ejercida por el perturbador externo siempre actúa en sentido opuesto a la masa central, el objeto interno “verá” una masa central menos masiva y se moverá levemente hacia afuera, llegando más “tarde” al punto del perihelio debido al mayor camino recorrido, por lo cual la longitud del perihelio sufre una leve precesión.

Si el objeto de masa despreciable es externo al perturbador, es fácil demostrar por un proceso similar que las conjunciones en el afelio proveen la configuración de equilibrio estable y que el mecanismo de resonancia produce una regresión de la longitud del perihelio. En el caso de Titán e Hyperion que vimos antes, este efecto es suficiente para introducir una regresión neta del eje de las ápside de  $\approx 19^\circ / yr$ .

## 7. Posición nominal de la resonancia:

Si partimos de las ecuaciones de Lagrange [ecuaciones (V-10)] pero consideramos sólo el orden más bajo en la excentricidad e inclinación, tenemos:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dn}{dt} &= -\frac{3}{a^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda}, \\
 \frac{de}{dt} &= -\frac{1}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \tilde{\omega}}, \\
 \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{na^2 \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega}, \\
 \frac{d\tilde{\omega}}{dt} &= +\frac{1}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} + \frac{\sin \frac{1}{2}i}{na^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i}, \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= +\frac{1}{na^2 \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i}, \\
 \frac{d\epsilon}{dt} &= +\frac{e}{2na^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e},
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI-20})$$

donde se reemplaza la expresión para  $da/dt$  con  $dn/dt$  usando para ello la relación  $dn/dt = -(3n)/(2a) da/dt$ , y en la expresión para  $d\epsilon/dt$  no se consideraron términos con derivadas parciales respecto de  $a$ .

Como la forma general para el argumento de los cosenos en el desarrollo de la función perturbadora es  $\varphi = j_1 \lambda' + j_2 \lambda + j_3 \tilde{\omega}' + j_4 \tilde{\omega} + j_5 \Omega' + j_6 \Omega$ , podemos obtener la derivada de este argumento respecto del tiempo:

$$\frac{d\varphi}{dt} = j_1 \left( n' + \frac{d\epsilon'}{dt} \right) + j_2 \left( n + \frac{d\epsilon}{dt} \right) + j_3 \frac{d\tilde{\omega}'}{dt} + j_4 \frac{d\tilde{\omega}}{dt} + j_5 \frac{d\Omega'}{dt} + j_6 \frac{d\Omega}{dt}, \quad (\text{VI-21})$$

utilizando las ecuaciones (VI-20). Entonces, diremos que el objeto perturbado se encuentra en la RESONANCIA EXACTA cuando la variación temporal de un argumento resonante particular [ecuación (VI-21)] sea exactamente cero, lo que implica que debe existir una combinación lineal particular de movimientos medios y tasas de precesión tales que  $d\varphi/dt = 0$ .

Si no consideramos en la ecuación (VI-21) las contribuciones debidas a las variaciones de las longitudes, la resonancia *exacta* se produce en:

$$j_1 n' + j_2 n \approx 0,$$

donde  $j_1 = p + q$  y  $j_2 = -p$ , siendo  $p$  y  $q$  números enteros positivos y  $q$  es el ORDEN DE LA RESONANCIA. Entonces, definimos la POSICIÓN NOMINAL para la resonancia  $p + q : p$  como

el semieje mayor del cuerpo más interno que satisface la relación:

$$a_n = \left( \frac{p}{p+q} \right)^{2/3} a', \quad (\text{VI-22})$$

con una definición similar para resonancias externas. Es importante recordar que esta relación sólo da la posición aproximada de la resonancia. En una situación real debemos considerar las contribuciones debidas a las tasas de precesión de las longitudes, las que producen *resonancias exactas diferentes* asociadas a una conmensurabilidad  $p+q : p$  dada. Dependiendo de la combinación de tasas de precesión que se consideren se obtiene una *separación* de la resonancia básica que abarca en este caso un cierto rango de semiejes mayores.

## 8. El modelo pendular:

Si consideramos un problema restringido de tres cuerpos donde un objeto externo en órbita circular perturba a un objeto interno de masa despreciable y ambos objetos se mueven en el mismo plano, el término general del desarrollo de la función perturbadora promediada es:

$$\langle \mathcal{R} \rangle = \frac{Gm'}{a'} [f_s(\alpha)e^2 + f_d(\alpha)e^{|j_4|} \cos \varphi], \quad (\text{VI-23})$$

donde:

$$\varphi = j_1 \lambda' + j_2 \lambda + j_4 \tilde{\omega},$$

y  $f_s(\alpha)$  y  $f_d(\alpha)$  corresponden a las funciones definidas en la ecuación (V-38) para las contribuciones seculares y resonante directa, respectivamente. Las ecuaciones de movimiento son:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= 3j_2 \mathcal{C}_r n e^{|j_4|} \sin \varphi, \\ \frac{de}{dt} &= j_4 \mathcal{C}_r e^{|j_4|-1} \sin \varphi, \\ \frac{d\tilde{\omega}}{dt} &= 2\mathcal{C}_s + |j_4| \mathcal{C}_r e^{|j_4|-2} \cos \varphi, \\ \frac{d\epsilon}{dt} &= \mathcal{C}_s e^2 + \frac{1}{2} |j_4| \mathcal{C}_r e^{|j_4|} \cos \varphi, \end{aligned} \right] \quad (\text{VI-24})$$

donde:

$$\mathcal{C}_r = \frac{Gm'}{na^2 a'} f_d(\alpha) = \left( \frac{m'}{m_0} \right) n \alpha f_d(\alpha),$$

$$\mathcal{C}_s = \frac{Gm'}{na^2 a'} f_s(\alpha) = \left( \frac{m'}{m_0} \right) n \alpha f_s(\alpha),$$

son constantes,  $m_0$  es la masa del cuerpo central y se hizo la sustitución  $G = n^2 a^3 / m_0$ .

Las ecuaciones (VI-24) nos permiten deducir algunas propiedades básicas de la variación de los elementos orbitales. Dado que  $|j_4| \geq 1$ , el movimiento medio y el semieje mayor de la órbita son casi constantes debido al factor  $e^{|j_4|}$  en la expresión para  $dn/dt$ . La variación para  $e$  es proporcional a  $e^{|j_4|-1}$ , por lo cual este elemento sufrirá grandes variaciones. La expresión para  $d\tilde{\omega}/dt$  muestra que una órbita casi circular sufrirá cambios rápidos en su longitud del perihelio dado que el término resonante en su expresión domina sobre el secular. Lo mismo sucede para  $d\epsilon/dt$  en el caso de resonancias de primer orden, pero el término secular será comparable al resonante para resonancias de segundo orden.

Como  $dn/dt = -(3n)/(2a)da/dt$ , tenemos que  $da/dt = -2j_2 C_r a e^{|j_4|} \sin \varphi$ , y entonces:

$$\frac{da}{de} \approx -2 \frac{j_2}{j_4} a e,$$

que implica una correlación entre las variaciones de  $a$  y  $e$ . Si  $j_2$  y  $j_4$  tienen el mismo signo (resonancia interior),  $da/de < 0$  y un máximo de  $a$  corresponde a un mínimo de  $e$  y viceversa. Si  $j_2$  y  $j_4$  tienen signos opuestos (resonancia exterior),  $da/de > 0$  y ambos elementos alcanzan un máximo o un mínimo juntos.

Partiendo de una órbita externa fija, la expresión para la variación del ángulo resonante es:

$$\frac{d\varphi}{dt} = j_1 n' + j_2 \left( n + \frac{d\epsilon}{dt} \right) + j_4 \frac{d\tilde{\omega}}{dt}. \quad (\text{VI-25})$$

Las ecuaciones (VI-24) y (VI-25) describen la variación de los elementos orbitales en la vecindad de una resonancia en el problema restringido plano y circular, pero pueden extenderse para cubrir otros casos. Por ejemplo, si consideramos el movimiento en órbitas circulares e inclinadas existe un paralelismo entre el comportamiento de la inclinación y el nodo con el que vimos para la excentricidad y longitud del perihelio.

Como  $dn'/dt = 0$  por ser la órbita externa circular, la segunda derivada del argumento  $\varphi$  [ecuación (VI-25)] es:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = j_2 \frac{dn}{dt} + j_2 \frac{d^2\epsilon}{dt^2} + j_4 \frac{d^2\tilde{\omega}}{dt^2}. \quad (\text{VI-26})$$

Si escribimos:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = C_s e^2 + |j_4| C_r F(e) \cos \varphi,$$

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = 2C_s + |j_4| C_r G(e) \cos \varphi,$$

donde:

$$F(e) = \frac{1}{2} e^{|j_4|}, \quad G(e) = e^{|j_4|-2},$$

podemos escribir:

$$\frac{d^2\epsilon}{dt^2} = 2\mathcal{C}_s e \frac{de}{dt} + |j_4|\mathcal{C}_r \left( \frac{dF(e)}{de} \frac{de}{dt} \cos \varphi - F(e) \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi \right), \quad (\text{VI-27})$$

$$\frac{d^2\tilde{\omega}}{dt^2} = |j_4|\mathcal{C}_r \left( \frac{dG(e)}{de} \frac{de}{dt} \cos \varphi - G(e) \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi \right).$$

Como en las constantes  $\mathcal{C}_r$  y  $\mathcal{C}_s$  aparece un factor  $m'/m_0$  que usualmente es una cantidad pequeña, la aparición de  $de/dt$  y  $d\varphi/dt$  en las ecuaciones (VI-27) contribuye con otro factor  $m'/m_0$ , por lo cual las contribuciones de  $d^2\epsilon/dt^2$  y  $d^2\tilde{\omega}/dt^2$  a  $d^2\varphi/dt^2$  pueden ser despreciadas en la mayoría de las circunstancias. De todos modos, en el caso de resonancias de primer orden ( $|j_4| = 1$ ), tenemos que  $G(e) = 1/e$  y como  $e$  es una cantidad pequeña la contribución de  $d^2\tilde{\omega}/dt^2$  a  $d^2\varphi/dt^2$  no es despreciable y debe ser considerada. En cualquier caso, no hay contribución de la parte secular de la función perturbadora.

Si despreciamos las contribuciones de  $d^2\epsilon/dt^2$  y  $d^2\tilde{\omega}/dt^2$  y usamos la expresión para  $dn/dt$  dada en la ecuación (VI-24), obtenemos que:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 3j_2^2\mathcal{C}_r n e^{|j_4|} \sin \varphi. \quad (\text{VI-28})$$

Si calculamos el valor de  $\mathcal{C}_r$  vemos que es negativa cuando el orden de la resonancia es impar, y positiva cuando el orden es par. Si nos restringimos a resonancias de orden impar,  $d^2\varphi/dt^2$  toma la forma:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin \varphi, \quad (\text{VI-29})$$

donde:

$$\omega^2 = -3j_2^2\mathcal{C}_r n e^{|j_4|},$$

y asumimos que  $n$ ,  $e$ , y por lo tanto  $\omega_0$  son aproximadamente constantes. Como  $\omega_0^2$  es siempre positivo para resonancias de orden impar, la ecuación (VI-29) es idéntica a la de un péndulo simple con movimiento estable alrededor de  $\varphi = 0$ . En el caso de resonancias de orden par el movimiento también es similar al que describe un péndulo simple, pero en este caso el punto estable es  $\varphi = \pi$  en lugar de  $\varphi = 0$ . A partir de este punto, cuando se haga referencia a la ecuación del péndulo nos referiremos a la ecuación (VI-29) a pesar de que existen diferencias entre esta expresión para resonancias de orden impar y la correspondiente para orden par.

La solución de la ecuación (VI-29) puede describirse como una CIRCULACIÓN o una LIBRACIÓN del argumento  $\varphi$  dependiendo de la energía del sistema. La energía total  $\mathcal{E}$  del sistema por unidad de masa es:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + 2\omega_0^2 \sin^2 \left( \frac{1}{2}\varphi \right), \quad (\text{VI-30})$$

y entonces podemos clasificar los diferentes tipos de movimiento considerando diferentes valores de  $\mathcal{E}$ . Si definimos como  $\mathcal{E}_0$  la máxima energía potencial, tenemos que:

1. Si  $\mathcal{E} > \mathcal{E}_0$ , el movimiento de  $\varphi$  es *ilimitado* y corresponde a una circulación del ángulo  $\varphi$ .
2. Si  $\mathcal{E} < \mathcal{E}_0$ , el movimiento de  $\varphi$  es *limitado* y corresponde a una oscilación o libración del ángulo  $\varphi$ .
3. En el caso especial donde  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$ , el movimiento ocurre en una *separatriz* que divide el régimen de circulación del de libración. En el caso de un péndulo, esta situación corresponde al péndulo en la posición vertical superior.

## 9. Ancho de libración:

La principal ventaja de obtener un modelo analítico simple para una resonancia es la posibilidad de estimar la variación de los parámetros orbitales debido a esa resonancia. En el caso del Sistema Solar, la estimación más importante que se puede realizar es la extensión de la región de libración en semieje mayor para un objeto en resonancia.

Considerando la ecuación (VI-30), la energía correspondiente al máximo de libración ocurre para  $d\varphi/dt = 0$  y  $\varphi = \pm\pi$ , lo que implica que:

$$\mathcal{E}_{max} = -6j_2^2 \mathcal{C}_r n e^{|j_4|}.$$

Si hacemos  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{max}$  y consideramos la variación de  $\varphi$  dada por:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm j_2 \left(12|\mathcal{C}_r| n e^{|j_4|}\right)^{1/2} \cos\left(\frac{1}{2}\varphi\right),$$

podemos relacionar la variación de  $\varphi$  con la variación de  $n$  mediante la ecuación (VI-24) para obtener:

$$\begin{aligned} dn &= 3j_2 \mathcal{C}_r n e^{|j_4|} \frac{\sin \varphi}{d\varphi/dt} d\varphi = \\ &= \pm \left(3|\mathcal{C}_r| n e^{|j_4|}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right) d\varphi. \end{aligned} \tag{VI-31}$$

La integración de la ecuación (VI-31) nos da:

$$n = n_0 \pm \left(12|\mathcal{C}_r| n e^{|j_4|}\right)^{1/2} \cos\left(\frac{1}{2}\varphi\right),$$

y el máximo cambio en movimiento medio es:

$$\delta n_{max} = \pm \left( 12 |C_r| n e^{|j_4|} \right)^{1/2}, \quad (\text{VI-32})$$

que ocurre cuando  $\varphi = 0$ . Si utilizamos la tercera Ley de Kepler encontramos que el máximo cambio en el semieje mayor es:

$$\delta a_{max} = \pm a \left( \frac{16}{3} \frac{|C_r|}{n} e^{|j_4|} \right)^{1/2}. \quad (\text{VI-33})$$

Si bien esta última expresión no es válida para resonancias de primer orden, ya que en ese caso hay que considerar la contribución de  $d^2\tilde{\omega}/dt^2$  a  $d^2\varphi/dt^2$ , aún indica el comportamiento correcto del ancho de libración, ya que las ecuaciones (VI-32) y (VI-33) indican que el ancho de libración crece para valores crecientes de  $e$ . La diferencia entre estas expresiones y las correspondientes a resonancias de primer orden es que se debe incluir un término más en las ecuaciones (VI-32) y (VI-33) que ensancha la región de libración para excentricidades bajas.

## 10. Los vacíos de Kirkwood:

A pesar de que en 1867 sólo se conocían 91 asteroides en el cinturón, fue suficiente para que Daniel Kirkwood se diera cuenta de que la distribución de objetos no era al azar y estaba influenciada por perturbaciones debidas a Júpiter. Esta distribución particular formaba lo que él llamo VACIOS en analogía a las zonas vacías que se observan en los anillos de Saturno.

Desde la época de Kirkwood el número de objetos aumentó en varios órdenes de magnitud y hoy es posible estudiar este efecto con mayor detenimiento. En la Figura 26 se muestra un gráfico de  $a \cos \tilde{\omega}$  vs.  $a \sin \tilde{\omega}$  para los 10000 primeros asteroides. En el gráfico se ve claramente que aparecen zonas sin objetos que corresponden a los vacíos de Kirkwood, que los bordes interno y externo del cinturón quedan bien definidos por las resonancias 4 : 1 y 2 : 1 con Júpiter, respectivamente, pero también resulta visible el grupo de asteroides Hildas en la resonancia 3 : 2.

También resulta claro que existe una asimetría en la distribución de longitudes del perihelio, con una mayor concentración en la dirección del perihelio de Júpiter (indicado con una flecha). Esto es una consecuencia del hecho de que la tasa de precesión de un asteroide dominada por las perturbaciones de Júpiter están en un mínimo cuando los perihelios están alineados y en un máximo cuando difieren en  $180^\circ$ .

La ausencia de objetos más allá de la resonancia 3 : 2 en  $3,97 UA$ , salvo unos pocos en la resonancia 4 : 3 en  $4,29 UA$  también es un efecto resonante causado por la superposición de la

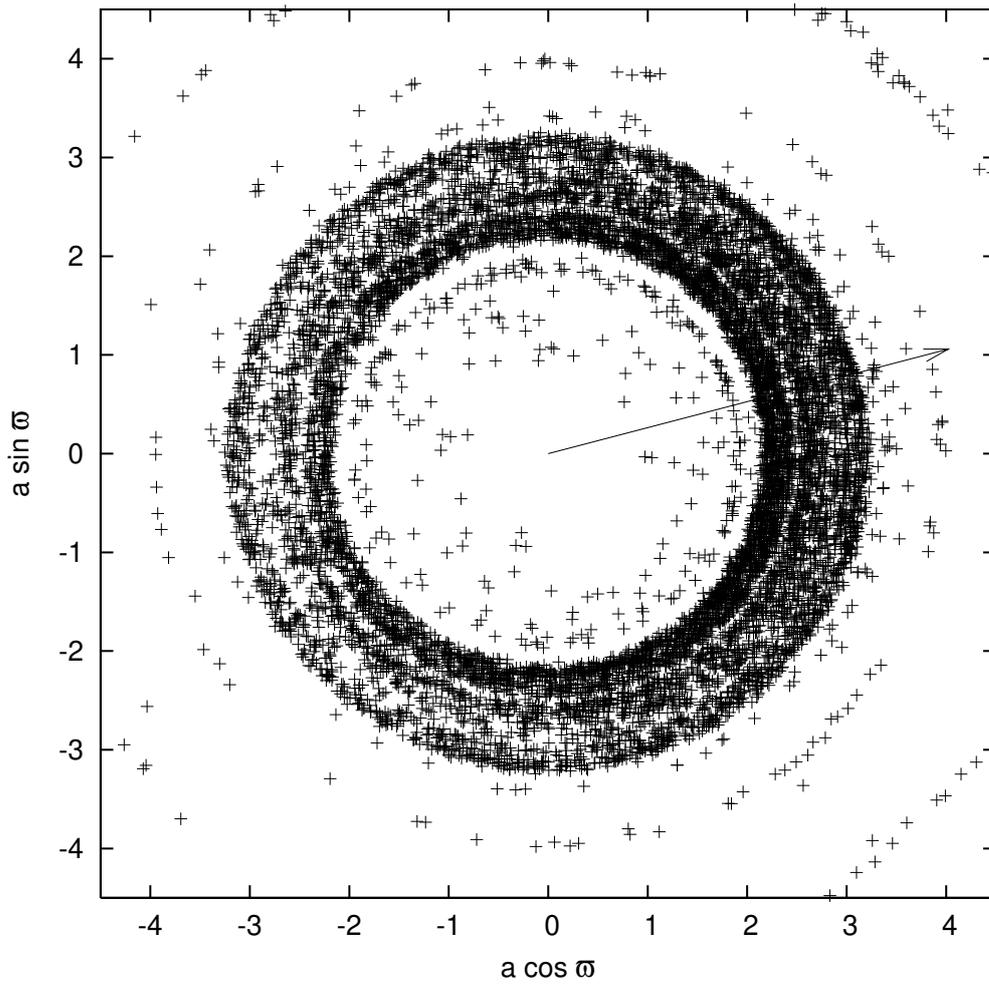


Figura 26:

secuencia de resonancias de primer orden a medida que nos acercamos a Júpiter, lo que nos da una región inestable de  $\approx 0,9UA$  hacia adentro de la órbita de Júpiter en buen acuerdo con las observaciones.

Las hipótesis que se han esgrimido hasta el momento para explicar los vacíos de Kirkwood se pueden dividir en cuatro grupos principales:

- *La hipótesis estadística.* Esta hipótesis argumenta que los vacíos son una ilusión producida por la libración de los asteroides. Como un objeto en la resonancia efectuará una libración pasará más tiempo en los extremos que pasando por el centro de la resonancia. Entonces, estadísticamente existe mayor probabilidad de observar un objeto en los bordes de libración que en el centro. Aparte de algunos objetos que efectivamente están librando, hasta el momento no hay indicios de que esta sea una explicación plausible.
- *La hipótesis colisional.* Esta idea fue originalmente enunciada por Kirkwood. Esta hipótesis sugiere que los cambios en los elementos orbitales de los objetos afectados causa que colisionen con objetos cercanos disminuyendo la densidad de asteroides cerca de la resonancia.
- *La hipótesis cosmogónica.* Estas teorías proponen que los vacíos son regiones donde los asteroides no se formaron o que reflejan procesos que operaron durante las etapas tempranas de la formación del Sistema Solar. Dentro de este grupo se incluye la propuesta del *barrido* de resonancias debido al movimiento de Júpiter producto del intercambio de momento angular o a variaciones en la masa de la nebulosa solar.
- *La hipótesis gravitacional.* Esta hipótesis propone que los vacíos pueden ser entendidos en el contexto de un problema de tres cuerpos (sol - Júpiter - asteroide). Si bien diferentes investigaciones sustentan esta hipótesis, el mecanismo exacto aún no es comprendido completamente.